

Considerações sobre a Modelagem Estocástica da Combinação de Filtros Adaptativos Usando o Algoritmo NLMS

Khaled Jamal Bakri, Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara

Resumo—Este artigo trata da modelagem estocástica de uma estrutura de filtragem envolvendo a combinação de dois filtros adaptativos operando com o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*). Particularmente, levando em conta um problema de identificação de sistema com planta estacionária e sinal de entrada gaussiano, modelos estocásticos são apresentados considerando estruturas de filtragem envolvendo tanto combinação afim quanto combinação convexa. Resultados de simulação para diferentes cenários de operação são mostrados, ratificando a precisão dos modelos obtidos tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

Palavras-chave—*algoritmo NLMS, combinação afim, combinação convexa, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.*

Abstract—This paper deals with the stochastic modeling of a filtering structure involving the combination of two adaptive filters operating with the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm. Particularly, taking into account a system identification problem with stationary plant and Gaussian input data, stochastic models are presented allowing for filtering structures involving both affine and convex combination. Simulation results for different operation scenarios are shown, ratifying the accuracy of the models obtained for both transient and steady-state phases.

Keywords—*NLMS algorithm, affine combination, convex combination, adaptive filtering, stochastic modeling.*

I. INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas, filtragem adaptativa tem se consolidado como uma ferramenta bastante interessante em diversas aplicações do mundo real [1]-[3]; especialmente, em cenários onde não se tem conhecimento *a priori* das estatísticas dos sinais e/ou quando os sinais envolvidos variam no tempo. Nessas aplicações, filtros adaptativos são comumente utilizados operando com algoritmos já consagrados na literatura, tais como os algoritmos LMS (*least-mean-square*), NLMS (*normalized LMS*), PNLMS (*proportionate NLMS*) e suas variações, bem como o algoritmo adaptativo RLS (*recursive-least-square*) [1], [2]. Todavia, o sucesso de uma aplicação reside no ajuste adequado dos parâmetros do algoritmo adaptativo, tendo principalmente como objetivo a obtenção simultânea de uma convergência rápida aliada a um erro quadrático médio em excesso (EQME) reduzido. Visando então tratar essa relação de compromisso, estruturas de filtragem envolvendo a combinação de dois filtros adaptativos têm emergido como uma importante solução do ponto de vista prático [4]. Basicamente, tais estruturas possuem dois filtros adaptativos

Khaled Jamal Bakri, Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara estão vinculados ao LINSE—Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais do Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil (e-mails: khaled@linse.ufsc.br, kuhn@linse.ufsc.br e seara@linse.ufsc.br).

Eduardo Vinicius Kuhn está também vinculado ao LAPSE—Laboratório de Processamento de Sinais e Eletrônica do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (kuhn@utfpr.edu.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

operando em paralelo, sendo um deles denominado filtro rápido e o outro, filtro lento [5]. O passo de adaptação do algoritmo do filtro rápido deve ser suficientemente grande para que inicialmente a convergência seja rápida, enquanto o passo de adaptação do algoritmo do filtro lento deve ser pequeno a fim de se obter um EQME em regime permanente reduzido. Por fim, as saídas dos filtros componentes são combinadas através de um parâmetro de mistura, resultando assim na saída global da estrutura de combinação dos filtros adaptativos.

Levando em conta as diferentes regras de ajuste do parâmetro de mistura discutidas na literatura [6]-[13], a escolha de uma em particular bem como o ajuste adequado de seus parâmetros pode se tornar uma tarefa um tanto complexa. Nesse sentido, é imperativo conhecer melhor as principais vantagens e limitações de cada uma delas, bem como o seu impacto sobre o comportamento de uma estrutura de filtragem envolvendo a combinação de filtros adaptativos. Um caminho apropriado para se compreender melhor o funcionamento da estrutura de filtragem considerada se dá através da sua modelagem estocástica. Particularmente, busca-se através da modelagem estocástica obter expressões analíticas que possibilitem prever o comportamento global dessa estrutura de filtragem frente a diferentes cenários de operação. Além disso, um modelo pode auxiliar o projetista no ajuste de parâmetros inerentes à operação adequada da estrutura. Outra importante vantagem em se utilizar um modelo é evitar a necessidade de extensivas simulações de Monte Carlo (MC) para análises de desempenho.

Contudo, apesar dos esforços até então despendidos, pouco se tem desenvolvido em relação à modelagem da combinação de filtros adaptativos operando especificamente com o algoritmo NLMS, podendo-se citar apenas os modelos derivados em [8], [13] e [14]. Entretanto, esses modelos focam particularmente em sinais de entrada reais não-correlacionados e/ou consideram aproximações grosseiras para o cálculo das matrizes de autocorrelação normalizadas surgidas na derivação do modelo (para detalhes, veja a discussão em [15] e [16]). Como consequência, esses modelos ficam restritos a condições bastante específicas de operação, dificultando assim sua aplicabilidade tanto no entendimento do comportamento dessas estruturas de filtragem quanto no estudo do impacto dos parâmetros em seu desempenho. Nesse contexto, focando sobre uma estrutura de filtragem envolvendo a combinação de dois filtros adaptativos operando com o algoritmo NLMS, o presente trabalho de pesquisa tem por objetivo:

- i) introduzir uma metodologia geral de modelagem da combinação de filtros adaptativos operando com o algoritmo NLMS, considerando sinais de entrada gaussianos reais não-correlacionados e correlacionados;
- ii) obter expressões de modelo caracterizando o comportamento médio do vetor de coeficientes e da regra de ajuste do parâmetro de mistura, a curva de aprendizagem e recursões para computar os elementos da diagonal das matrizes de correlação dos vetores de erro

nos coeficientes; e

- iii) aplicar a metodologia desenvolvida aqui na estratégia de combinação afim dada em [6] e na estratégia de combinação convexa discutida em [7].

Vale salientar que comparações de desempenho entre as diferentes estratégias existentes na literatura visando o ajuste do parâmetro de mistura estão fora do escopo deste trabalho de pesquisa.

II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Em aplicações de identificação de sistema, busca-se obter uma estimativa da resposta ao impulso do sistema desconhecido (planta) \mathbf{w}_0 a partir do sinal de entrada $x(n)$ e do sinal desejado $d(n)$ [sinal de saída da planta corrompido por ruído aditivo de medição $z(n)$] [1]. Para tal, uma estrutura de filtragem envolvendo a combinação de dois filtros adaptativos [com vetores de coeficientes $\mathbf{w}_1(n)$ e $\mathbf{w}_2(n)$] operando em paralelo pode ser utilizada (veja Fig. 1) [17]. Nesse tipo de estrutura, o vetor de coeficientes global $\mathbf{w}(n)$, com dimensão M (mesma ordem da planta), é dado por

$$\mathbf{w}(n) = \eta(n)\mathbf{w}_1(n) + [1 - \eta(n)]\mathbf{w}_2(n) \quad (1)$$

onde $\eta(n)$ denota o parâmetro de mistura que controla a contribuição de cada filtro adaptativo componente. Dessa forma, a partir do sinal de saída de cada filtro adaptativo componente $y_i(n)$, com $i=1,2$, o sinal de saída global $y(n)$ resulta em

$$y(n) = \eta(n)y_1(n) + [1 - \eta(n)]y_2(n). \quad (2)$$

Consequentemente, o sinal de erro global é dado por

$$e(n) = d(n) - y(n) = \eta(n)e_1(n) + [1 - \eta(n)]e_2(n) \quad (3)$$

com $e_i(n)$ denotando o sinal de erro decorrente de cada filtro adaptativo componente.

Assume-se aqui que os dois filtros adaptativos são atualizados utilizando o algoritmo NLMS, cuja equação de adaptação é dada por [2]

$$\mathbf{w}_i(n+1) = \mathbf{w}_i(n) + \mu_i \frac{\mathbf{x}(n)e_i(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}, \quad i=1,2 \quad (4)$$

onde $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$ representa um vetor contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada, μ_i é o passo de adaptação, ε caracteriza uma constante positiva incluída no algoritmo para evitar divisão por zero e estabilizar a solução [1], [2],

$$e_i(n) = d(n) - y_i(n) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_i^T(n)\mathbf{x}(n) + z(n), \quad i=1,2 \quad (5)$$

e

$$y_i(n) = \mathbf{w}_i^T(n)\mathbf{x}(n), \quad i=1,2 \quad (6)$$

denotam o sinal de erro e o sinal de saída de cada filtro adaptativo componente, respectivamente.

III. MODELO ESTOCÁSTICO

O modelo aqui apresentado descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes e do parâmetro de mistura, curva de aprendizagem e recursões para computar os elementos da diagonal das matrizes de correlação dos vetores de erro nos coeficientes. Para obter as expressões de modelo, as seguintes hipóteses simplificativas são estabelecidas:

- H1) O sinal de entrada é oriundo de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$ [1], [2].
 H2) O parâmetro ε é uma constante positiva de valor pequeno, isto é, $\varepsilon \ll E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$, não afetando assim

o comportamento médio do algoritmo [18].

- H3) O ruído de medição $z(n)$ é decorrelacionado de qualquer outro sinal envolvido no processo, tendo média nula e variância σ_z^2 [1], [2].
 H4) Os vetores de coeficientes $\mathbf{w}_1(n)$ e $\mathbf{w}_2(n)$ são considerados estatisticamente independentes do vetor de sinal de entrada $\mathbf{x}(n)$ [1], [2].
 H5) O parâmetro de mistura $\eta(n)$ é também assumido estatisticamente independente de qualquer outra variável do processo [7], [10].

Note que as Hipóteses H1)-H4) vêm sendo comumente utilizadas na modelagem estocástica de diversos algoritmos adaptativos e são requeridas para tornar o desenvolvimento matematicamente tratável (para detalhes, veja [1], [2] e [18]). Por sua vez, a Hipótese H5) passa a ser mais precisa à medida que o algoritmo tende para a condição de regime permanente.

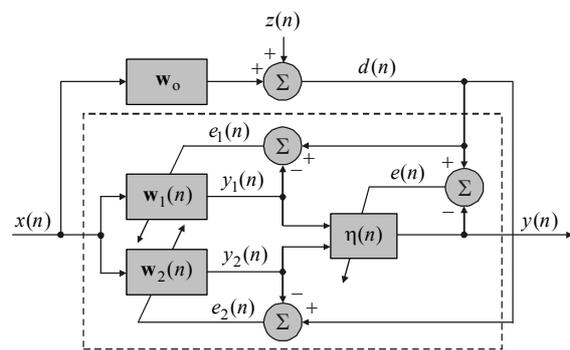


Fig.1. Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema utilizando uma estrutura envolvendo a combinação de dois filtros adaptativos.

A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Uma expressão descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes global do filtro adaptativo pode ser obtida tomando o valor esperado de ambos os lados de (1) e considerando a Hipótese H5), isto é,

$$E[\mathbf{w}(n)] = E[\eta(n)]E[\mathbf{w}_1(n)] + \{1 - E[\eta(n)]\}E[\mathbf{w}_2(n)] \quad (7)$$

onde $E[\eta(n)]$ caracteriza o comportamento médio do parâmetro de mistura. Por sua vez, o comportamento médio do vetor de coeficientes dos filtros componentes é obtido substituindo (5) em (4), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Hipóteses H2)-H4). Assim,

$$E[\mathbf{w}_i(n+1)] = (\mathbf{I} - \mu_i \mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}_i(n)] + \mu_i \mathbf{R}_1 \mathbf{w}_0, \quad i=1,2 \quad (8)$$

com \mathbf{I} denotando a matriz identidade e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right] \quad (9)$$

representando uma matriz do tipo autocorrelação normalizada [16], [19], [20]. Note que soluções analíticas para determinar \mathbf{R}_1 são apresentadas em [16] e [21] tanto para sinal de entrada gaussiano não-correlacionado quanto correlacionado.

Portanto, para uma dada condição inicial $\mathbf{w}_i(0)$, o comportamento médio do vetor de coeficientes global do filtro adaptativo pode ser predito através de (7) e (8) se a matriz de autocorrelação normalizada \mathbf{R}_1 , o vetor de coeficientes ótimo \mathbf{w}_0 e o comportamento médio do parâmetro de mistura $E[\eta(n)]$ forem conhecidos.

B. Curva de Aprendizagem

Para determinar uma expressão caracterizando a curva de aprendizagem do algoritmo [erro quadrático médio (EQM)], (5) é primeiramente reescrita em função do vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}_i(n) = \mathbf{w}_i(n) - \mathbf{w}_{0_i}, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

como

$$e_i(n) = -\mathbf{v}_i^T(n)\mathbf{x}(n) + z(n), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Em seguida, substituindo (11) em (3), obtém-se

$$e(n) = -\{\eta(n)\mathbf{v}_1^T(n)\mathbf{x}(n) + [1 - \eta(n)]\mathbf{v}_2^T(n)\mathbf{x}(n)\} + z(n). \quad (12)$$

Então, calculando $e^2(n)$ a partir de (12), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, considerando as Hipóteses H3) e H5), e assumindo que

$$E[\eta^2(n)] \cong E^2[\eta(n)] \quad (13)$$

obtm-se

$$J(n) = E[e^2(n)] \quad (14)$$

$$= J_{\min} + J_{\text{ex}}(n)$$

onde

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (15)$$

é função apenas da variância do ruído de medição e representa o EQM mínimo obtido quando $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_{0_i}$, e

$$J_{\text{ex}}(n) = E^2[\eta(n)]E[\mathbf{v}_1^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}_1(n)] + \{1 - E[\eta(n)]\}^2 E[\mathbf{v}_2^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}_2(n)] + 2E[\eta(n)]\{1 - E[\eta(n)]\}E[\mathbf{v}_2^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}_1(n)] \quad (16)$$

denota o EQME.

A partir de (16), verifica-se que o EQME pode ser simplificado para [2]

$$J_{\text{ex}}(n) = E^2[\eta(n)]J_{\text{ex},1}(n) + \{1 - E[\eta(n)]\}^2 J_{\text{ex},2}(n) + 2E[\eta(n)]\{1 - E[\eta(n)]\}J_{\text{ex},12}(n) \quad (17)$$

sendo a parcela decorrente de cada filtro componente dada por

$$J_{\text{ex},i}(n) = \lambda^T \mathbf{k}'_i(n), \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

onde λ e $\mathbf{k}'_i(n)$ denotam vetores contendo os autovalores de \mathbf{R} e os elementos da diagonal de

$$\mathbf{K}'_i(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_i(n) \mathbf{Q}, \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

respectivamente, enquanto o EQME cruzado entre os filtros componentes é dado por

$$J_{\text{ex},12}(n) = \lambda^T \mathbf{k}'_{12}(n) \quad (20)$$

com $\mathbf{k}'_{12}(n)$ denotando um vetor que contém os elementos da diagonal de

$$\mathbf{K}'_{12}(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_{12}(n) \mathbf{Q}. \quad (21)$$

Note em (19) e (21) que \mathbf{Q} representa a matriz contendo os autovetores de \mathbf{R} , enquanto $\mathbf{K}_i(n) = E[\mathbf{v}_i(n)\mathbf{v}_i^T(n)]$ caracteriza a matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes do i -ésimo filtro componente e $\mathbf{K}_{12}(n) = E[\mathbf{v}_1(n)\mathbf{v}_2^T(n)]$ caracteriza a matriz de correlação cruzada entre os vetores de erro nos coeficientes dos filtros componentes [2].

Portanto, a curva de aprendizagem pode ser predita através de (14), (15) e (17) se a potência do ruído de medição σ_z^2 , os autovalores λ_i da matriz de correlação do sinal de entrada \mathbf{R} , o comportamento médio do parâmetro de mistura $E[\eta(n)]$, bem como os vetores $\mathbf{k}'_1(n)$, $\mathbf{k}'_2(n)$ e $\mathbf{k}'_{12}(n)$ [contendo os elementos da diagonal das matrizes de correlação dos vetores de erro nos coeficientes $\mathbf{K}'_1(n)$, $\mathbf{K}'_2(n)$ e $\mathbf{K}'_{12}(n)$] forem conhecidos.

C. Matrizes de Correlação do Vetor de Erro nos Coeficientes

Expressões recursivas descrevendo a evolução de $\mathbf{k}'_1(n)$ e $\mathbf{k}'_2(n)$ podem ser derivadas reescrevendo (4) em função dos vetores de erro nos coeficientes $\mathbf{v}_i(n)$ [definido em (10)], substituindo (11) na expressão resultante, determinando $\mathbf{v}_i(n+1)\mathbf{v}_i^T(n+1)$, tomando o valor esperado de ambos os lados e utilizando (15) juntamente com as Hipóteses H2)-H5).

Dessa forma,

$$\mathbf{K}_i(n+1) = \mathbf{K}_i(n) - \mu_i \mathbf{K}_i(n) \mathbf{R}_1 - \mu_i \mathbf{R}_1 \mathbf{K}_i(n) + \mu_i^2 \mathbf{R}_{2,i} + \mu_i^2 \mathbf{R}_3 J_{\min}, \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

com

$$\mathbf{R}_{2,i} = E \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{v}_i(n)\mathbf{v}_i^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (23)$$

e

$$\mathbf{R}_3 = E \left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (24)$$

denotando matrizes do tipo autocorrelação normalizada [16], [21]. Então, levando em conta os resultados apresentados em [16] e [21], pré- e pós-multiplicando (22) por \mathbf{Q}^T e \mathbf{Q} , respectivamente, e tomando os elementos da diagonal da expressão resultante, tem-se

$$\mathbf{k}'_i(n+1) = \mathbf{B}_i \mathbf{k}'_i(n) + g_i \mathbf{s}, \quad i = 1, 2 \quad (25)$$

com

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - 2\mu_i \mathbf{H} + \mu_i^2 (2\mathbf{T} + \mathbf{P}) \quad (26)$$

e

$$g_i = \mu_i^2 J_{\min} \quad (27)$$

sendo as matrizes diagonais \mathbf{H} e \mathbf{T} , a matriz cheia \mathbf{P} , e o vetor \mathbf{s} provenientes do cálculo de \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 . Note que soluções analíticas para determinar \mathbf{H} , \mathbf{T} , \mathbf{P} e \mathbf{s} são dadas em [16], [20] e [21] tanto para sinal de entrada gaussiano não-correlacionado quanto correlacionado.

Do mesmo modo, determinando $\mathbf{v}_1(n+1)\mathbf{v}_2^T(n+1)$, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, usando (15) e considerando as Hipóteses H2)-H5), uma expressão recursiva para $\mathbf{k}'_{12}(n)$ é obtida por

$$\mathbf{k}'_{12}(n+1) = \mathbf{B}_{12} \mathbf{k}'_{12}(n) + g_{12} \mathbf{s} \quad (28)$$

com

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{I} - (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{H} + \mu_1 \mu_2 (2\mathbf{T} + \mathbf{P}) \quad (29)$$

e

$$g_{12} = \mu_1 \mu_2 J_{\min}. \quad (30)$$

Portanto, a partir de (25)-(30), a evolução dos elementos da diagonal das matrizes de correlação dos vetores de erro nos coeficientes $\mathbf{K}'_1(n)$, $\mathbf{K}'_2(n)$ e $\mathbf{K}'_{12}(n)$ pode ser computada; conseqüentemente, a curva de aprendizagem do algoritmo pode ser predita se o comportamento médio do parâmetro de mistura $E[\eta(n)]$ for conhecido.

D. Comportamento Médio do Parâmetro de Mistura

Antes de prosseguir com a derivação da expressão que caracteriza o comportamento médio do parâmetro de mistura, destaca-se que a metodologia desenvolvida até então é geral, podendo ser aplicada a diferentes regras de ajuste do parâmetro de mistura discutidas na literatura. Então, focando particularmente nas regras de ajuste introduzidas em [6] (combinação afim) e [7] (combinação convexa), expressões recursivas descrevendo o comportamento médio de $\eta(n)$ são agora obtidas.

1) *Combinação afim*: Em [6], o parâmetro de mistura $\eta(n)$ é ajustado através de¹

$$\eta(n+1) = \eta(n) + \mu_\eta e(n) [y_1(n) - y_2(n)] \quad (31)$$

onde μ_η denota o passo de adaptação que controla a velocidade de convergência do parâmetro $\eta(n)$. Visando melhorar a relação entre estabilidade e a capacidade de adaptação dos filtros componentes da regra de ajuste, o parâmetro de mistura é limitado a valores de $\eta(n) \leq 1$. Logo, substituindo (12) em (31), reescrevendo o termo

¹Note que $\eta(n)$ pode assumir qualquer valor real.

$[y_1(n) - y_2(n)]$ em função de $v_1(n)$ e $v_2(n)$ [veja (10)], tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, utilizando as definições (18) e (20), e ainda usando as Hipóteses H3)-H5), obtém-se

$$E[\eta(n+1)] = \{1 - \mu_\eta[\Delta J_{\text{ex},1}(n) + \Delta J_{\text{ex},2}(n)]\}E[\eta(n)] + \mu_\eta \Delta J_{\text{ex},2}(n) \quad (32)$$

com

$$\Delta J_{\text{ex},i}(n) = J_{\text{ex},i}(n) - J_{\text{ex},i2}(n), \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

e $E[\eta(n)] \leq 1$.

2) *Combinação convexa*: Em vez de ajustar o parâmetro $\eta(n)$ diretamente, a combinação convexa dada em [7] utiliza um parâmetro auxiliar obtido por

$$a(n+1) = a(n) + \mu_a e(n)[y_1(n) - y_2(n)]\eta(n)[1 - \eta(n)] \quad (34)$$

onde μ_a denota o passo de adaptação que controla a velocidade de convergência do parâmetro $a(n)$. Tal parâmetro é relacionado aqui com $\eta(n)$ através da função sigmóide²

$$\eta(n) = \text{sgm}[a(n)] = \frac{1}{1 + e^{-a(n)}} \quad (35)$$

Devido à presença do termo $\eta(n)[1 - \eta(n)]$ em (34), $a(n)$ sofre “congelamento” quando $\eta(n)$ fica próximo de 0 ou 1; por isso, $a(n)$ é usualmente limitado ao intervalo $[-4, 4]$ (para detalhes, veja [7] e [22]).

O comportamento médio de $\eta(n)$ pode ser determinado substituindo (12) em (34), reescrevendo o termo $[y_1(n) - y_2(n)]$ em função de $v_1(n)$ e $v_2(n)$ [conforme (10)], tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, considerando as Hipóteses H3)-H5) juntamente com as expressões (13), (18) e (20), e a aproximação

$$E[\eta^3(n)] \cong E^3[\eta(n)]. \quad (36)$$

Então, obtém-se³

$$E[a(n+1)] = E[a(n)] + \mu_a E[\eta(n)]\{1 - E[\eta(n)]\}^2 \Delta J_{\text{ex},2}(n) - \mu_a E^2[\eta(n)]\{1 - E[\eta(n)]\} \Delta J_{\text{ex},1}(n). \quad (37)$$

Finalmente, tendo em vista (37), aproxima-se (35) por

$$E[\eta(n)] \cong \text{sgm}\{E[a(n)]\}. \quad (38)$$

Portanto, dado que o comportamento médio de $\eta(n)$ tem sido agora determinado, é possível prever (de forma recursiva) o comportamento do parâmetro de mistura tanto para a combinação afim [veja (32)] quanto para a combinação convexa [veja (37) e (38)]. Dessa forma, o comportamento médio da combinação de filtros adaptativos fica completamente caracterizado.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Visando verificar a precisão das expressões de modelo propostas tanto para a combinação afim quanto para a combinação convexa, dois exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Nesses exemplos, o comportamento médio estimado através dos modelos é comparado com resultados obtidos por simulações de MC (200 realizações independentes). O sinal de entrada [veja a Hipótese H1)] é obtido através de um processo autorregressivo de segunda ordem AR(2), dado por [2]

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + v(n) \quad (39)$$

onde a_1 e a_2 são os coeficientes do processo e $v(n)$ denota

²Note que $\eta(n)$ é limitado ao intervalo de $[0, 1]$ através da função sigmóide.

³Vale salientar que um resultado similar é obtido em [22] utilizando expansão em série de Taylor.

um ruído branco cuja variância é ajustada através de

$$\sigma_v^2 = \left(\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \right) [(1 + a_2)^2 - a_1^2] \quad (40)$$

de tal modo que $\sigma_x^2 = 1$. A razão sinal-ruído (SNR) é definida aqui como

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right). \quad (41)$$

Nas simulações apresentadas, os valores dos parâmetros dos algoritmos NLMS são $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,05$ e $\varepsilon = 10^{-6}$. Portanto, no intuito de obter a mesma velocidade de convergência, o valor do passo de adaptação que controla a evolução do parâmetro de mistura na combinação afim [dada por (31)] é ajustado para $\mu_\eta = 0,2$, enquanto na combinação convexa [dada por (34) e (35)], o valor do passo de adaptação é $\mu_a = 100$.

A. Exemplo 1

Aqui, busca-se avaliar a precisão dos modelos propostos frente a sinal de entrada fracamente correlacionado e alta SNR. Para tal, considera-se que a resposta ao impulso da planta w_o (de ordem $M = 64$) é obtida a partir de um modelo de caminho de eco da Recomendação G.168 da ITU-T [23, Modelo 1], sendo normalizada de tal forma que $\|w_o\|^2 = 1$. Os coeficientes do processo AR(2) são $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,7$, resultando em uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada $\chi = 63,96$. O ruído de medição inerente ao ambiente de operação do sistema tem variância $\sigma_z^2 = 10^{-3}$, implicando $\text{SNR} = 30$ dB.

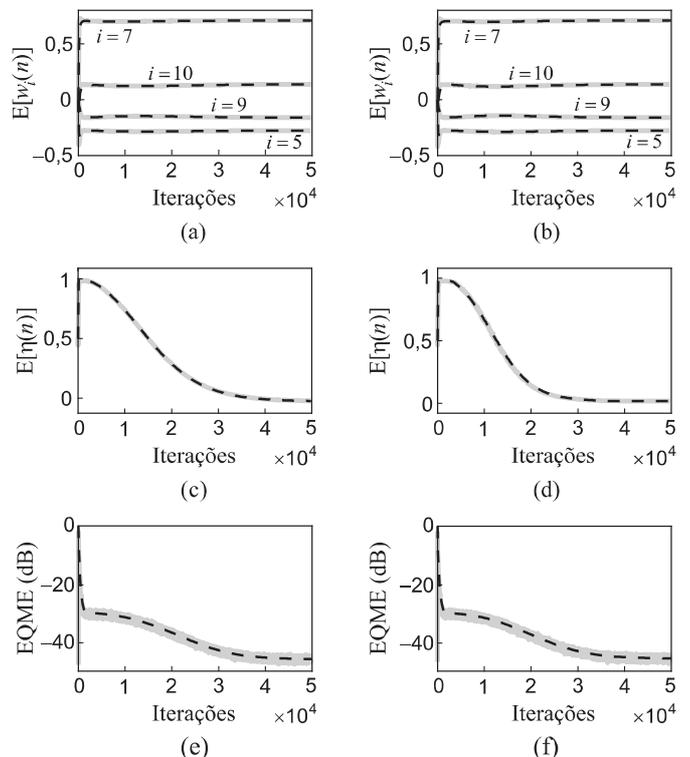


Fig. 2. Exemplo 1. Comportamento da combinação afim (lado esquerdo) e combinação convexa (lado direito) obtido por simulações de MC (linhas cinza) e previsto a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) e (b) Comportamento médio de quatro coeficientes do vetor global do filtro adaptativo. (c) e (d) Evolução do parâmetro de mistura. (e) e (f) Curva de aprendizagem (EQME).

B. Exemplo 2

Neste exemplo, avalia-se a precisão dos modelos propostos frente a sinal de entrada fortemente correlacionado e SNR

mais baixa do que aquela do Exemplo 1. Para tal, é considerado agora que a resposta ao impulso da planta (de ordem $M = 128$) é obtida a partir de um modelo de caminho de eco da Recomendação G.168 da ITU-T [23, Modelo 4], a qual é normalizada de tal forma que $\|\mathbf{w}_0\|^2 = 1$. Os coeficientes do processo AR(2) são $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,93$, originando uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada $\chi = 1173,78$. O ruído de medição tem variância $\sigma_z^2 = 10^{-2}$, resultando em $\text{SNR} = 20$ dB.

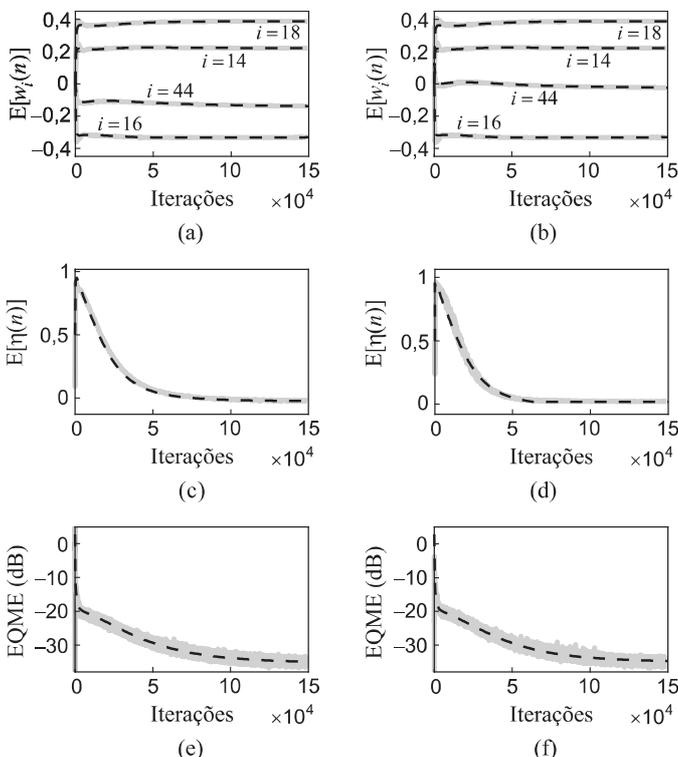


Fig. 3. Exemplo 2. Comportamento da combinação afim (lado esquerdo) e combinação convexa (lado direito) obtido por simulações de MC (linhas cinza) e predito a partir do modelo proposto (linhas escuras tracejadas). (a) e (b) Comportamento médio de quatro coeficientes do vetor global do filtro adaptativo. (c) e (d) Evolução do parâmetro de mistura. (e) e (f) Curva de aprendizagem (EQME).

As Figs. 2 e 3 mostram os resultados obtidos para os cenários descritos nos Exemplos 1 e 2, respectivamente. Observa-se, através dessas figuras, que os modelos propostos predizem satisfatoriamente o comportamento das estruturas de filtragem envolvendo as combinações afim e convexa de dois filtros adaptativos operando com o algoritmo NLMS, tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Tal precisão pode ser verificada para diferentes dispersões de autovalores, valores de SNR e ordens do filtro adaptativo. Os resultados apresentados também confirmam a precisão da abordagem considerada para computar as matrizes de autocorrelação normalizada.

V. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo, assumindo um número reduzido de hipóteses simplificativas, foram derivados modelos para duas estruturas de filtragem envolvendo a combinação afim e a combinação convexa de dois filtros adaptativos operando com o algoritmo NLMS. Particularmente, foram obtidas expressões de modelo que permitem prever o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem, as matrizes de correlação dos vetores de erros nos coeficientes, como também a evolução do parâmetro de mistura. Os resultados de

simulação apresentados ratificam a precisão das expressões de modelo obtidas frente a diferentes condições de operação. Por fim, destaca-se que a metodologia desenvolvida pode ser aplicada a outras regras de combinação utilizadas em estruturas de filtragem envolvendo o algoritmo NLMS, tendo em vista as especificidades da regra de ajuste do parâmetro de mistura considerada.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer os revisores pelas valiosas e construtivas sugestões.

REFERÊNCIAS

- [1] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2014.
- [3] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 2nd ed. West Sussex, U.K.: John Wiley & Sons, 2013.
- [4] J. Arenas-García, L. A. Azpicueta-Ruiz, and A. R. Figueiras-Vidal, "Improved adaptive filtering schemes via adaptive combination," in *Proc. Asilomar Conf. Signal, Syst. and Comput. (ACSSC)*, Pacific Grove, CA, USA, Nov. 2009, pp. 176-180.
- [5] J. Arenas-García, L. A. Azpicueta-Ruiz, M. T. M. Silva, V. H. Nascimento, and A. H. Sayed, "Combinations of adaptive filters: performance and convergence properties," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 33, no. 1, pp. 120-140, Jan. 2016.
- [6] N. J. Bershad, J. C. M. Bermudez, and J.-Y. Tourneret, "An affine combination of two LMS adaptive filters—transient mean-square analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1853-1864, May 2008.
- [7] J. Arenas-García, A. R. Figueiras-Vidal, and A. H. Sayed, "Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 3, pp. 1078-1090, Mar. 2006.
- [8] R. Candido, M. T. M. Silva, and V. H. Nascimento, "Transient and steady-state analysis of the affine combination of two adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 8, pp. 4064-4078, Aug. 2010.
- [9] L. A. Azpicueta-Ruiz, A. R. Figueiras-Vidal, and J. Arenas-García, "A normalized adaptation scheme for the convex combination of two adaptive filters," in *Proc. Int. Conf. Acoust, Speech and Signal Process. (ICASSP)*, Las Vegas, NV, USA, Mar./Apr. 2008, pp. 3301-3304.
- [10] R. Candido, M. T. M. Silva, and V. H. Nascimento, "Affine combinations of adaptive filters," in *Proc. Asilomar Conf. Signal, Syst. and Comput. (ACSSC)*, Pacific Grove, CA, USA, Oct. 2008, pp. 236-240.
- [11] L. Shi, Y. Lin, and X. Xie, "Combination of affine projection sign algorithms for robust adaptive filtering in non-gaussian impulsive interference," *Electron. Lett.*, vol. 50, no. 6, pp. 466-467, Mar. 2014.
- [12] L. A. Azpicueta-Ruiz, A. R. Figueiras-Vidal, and J. Arenas-García, "A new least squares adaptation scheme for the affine combination of two adaptive filters," in *Proc. Int. Workshop Mach. Learn. Signal Process. (MLSP)*, Cancun, Mexico, Oct. 2008, pp. 327-332.
- [13] J. C. M. Bermudez, N. J. Bershad, and J.-Y. Tourneret, "An affine combination of two NLMS adaptive filters - transient mean-square analysis," in *Proc. Asilomar Conf. Signal, Syst. and Comput. (ACSSC)*, Pacific Grove, CA, USA, Oct. 2008, pp. 230-235.
- [14] T. Trump, "Transient analysis of an output signal based combination of two NLMS adaptive filters," in *Proc. Int. Workshop Mach. Learn. Signal Process. (ICDSP)*, Kittila, Finland, Aug./Sep. 2010, pp. 244-249.
- [15] E. V. Kuhn and R. Seara, "Modelo estocástico do algoritmo NLMS para sinais de entrada gaussianos complexos," in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Brasília, DF, Set. 2012, pp. 1-5.
- [16] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "An improved stochastic model of the NLMS algorithm for correlated input data," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, Sep. 2007, pp. 360-364.
- [17] M. Martínez-Ramón, J. Arenas-García, A. Navia-Vázquez, and A. R. Figueiras-Vidal, "An adaptive combination of adaptive filters for plant identification," in *Proc. Int. Conf. Digit. Signal Process. (ICDSP)*, Santorini, Greece, Jul. 2002, vol. 2, pp. 1195-1198.
- [18] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform-domain ϵ LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840-1852, May 2008.
- [19] N. J. Bershad, "Behavior of the ϵ -normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 35, no. 5, pp. 636-644, May 1987.
- [20] N. J. Bershad, "Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 4, pp. 793-806, Aug. 1986.
- [21] M. Rupp, "The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149-1160, Mar. 1993.
- [22] V. H. Nascimento, M. T. M. Silva, R. Candido, and J. Arenas-García, "A transient analysis for the convex combination of adaptive filters," in *Proc. Workshop Statistical Signal Process. (SSP)*, Cardiff, UK, Aug./Sep. 2009, pp. 53-56.
- [23] *ITU-T Recommendation G.168, Digital Network Echo Cancellers*. Geneva, Switzerland: Int. Telecomm. Union, 2009.