

Uma Abordagem para o Planejamento da Capacidade de Redes em Ambientes Competitivos com Base na Teoria de Jogos

Helio Waldman e Rodrigo C. Bortoletto

Resumo—Este artigo discute as estratégias de dimensionamento das redes de duas operadoras que fornecem canais para uma mesma população de usuários sobre uma infraestrutura comum, em um ambiente competitivo. Os usuários desejam ser atendidos com mínima probabilidade de bloqueio, enquanto as operadoras desejam maximizar seus lucros. Resultam dois jogos não cooperativos, respectivamente entre os usuários e entre as operadoras entre si, que são modelados e discutidos. No jogo das operadoras, é discutido o efeito de assimetria de custos, a fim de determinar a assimetria necessária para desafiar um monopólio competitivo.

Palavras-Chave—redes de telecomunicação, dimensionamento de redes, teoria de jogos, probabilidade de bloqueio, modelo de Markov, equilíbrio de Nash.

Abstract—This paper discusses the network dimensioning strategies of two operating companies that supply channels to the same population of users based on a common infrastructure, in a competitive environment. The users wish to be serviced with minimum blocking probability, while the operators wish to maximize their profits. The resulting two non-cooperative games, respectively among the users and among the operators, are modeled and discussed. In the operators' game, the effect of cost asymmetries is analyzed in order to determine the ability of an entrant to challenge a competitive monopoly as a function of his/her cost advantage.

Keywords—telecommunication networks, network dimensioning, game-theory, blocking probability, Markovian model, Nash equilibrium.

I. INTRODUÇÃO

A concorrência em redes de telecomunicação, especialmente no seu núcleo, levanta questões relativas ao seu dimensionamento, custos e rentabilidade em ambientes incertos [1]. Na abordagem clássica do dimensionamento de redes, tais questões são deixadas de lado, sendo implementados canais em quantidade estritamente necessária para garantir uma probabilidade de bloqueio suficientemente pequena de uma chamada qualquer ser bloqueada [2].

A abordagem clássica pressupõe que uma única operadora seja autorizada a operar em uma área utilizando um certo conjunto de canais. Se mais que uma operadora for autorizada a operar em uma mesma área, nenhuma operadora poderá ser responsabilizada isoladamente pela probabilidade de bloqueio de um usuário. Quando uma requisição é bloqueada por todas as operadoras, diremos que ocorre um bloqueio duro.

Se os usuários forem livres para submeter sua requisição a qualquer operadora de um conjunto de pelo menos duas, então tanto a probabilidade de bloqueio duro como a probabilidade de bloqueio de cada operadora, aqui chamada de bloqueio suave, dependeriam dos números de canais disponibilizados aos usuários por todas as operadoras.

No ambiente de negócios competitivo das atuais redes de telecomunicação, é necessária uma nova abordagem para discutir redes que compartilham uma mesma infraestrutura física, mas competem por clientes em um mercado que provisiona canais para seus usuários. Neste trabalho propomos uma abordagem baseada em teoria dos jogos para este problema [8]. Dois jogos relevantes são identificados e estudados: o primeiro é disputado por usuários que desejam minimizar sua probabilidade de bloqueio; e o segundo por operadoras que desejam maximizar seus lucros.

Em [5] mostramos que a maximização do lucro pode ser compatível com uma probabilidade de bloqueio aceitável quando existem altas intensidades de tráfego, mesmo num cenário monopolista. Neste trabalho, discutiremos uma situação em que duas operadoras fornecem canais no mesmo enlace simples para uma ampla população de usuários. Todo pedido por um novo canal será sempre submetido pelo usuário interessado à sua operadora primária. Sempre que o pedido for bloqueado por sua operadora primária, será então submetido à sua operadora secundária. Por isso, o bloqueio de um pedido pela operadora primária é chamado de bloqueio suave.

Dado um tráfego total gerado pela população de usuários, a probabilidade de bloqueio duro depende apenas da soma dos canais fornecidos por todas as operadoras. Portanto, se todas as demais características dos serviços forem as mesmas (preço, prestação no atendimento, entre outros.), os usuários são propensos a escolher uma operadora primária com a menor probabilidade de bloqueio suave. Assume-se que os usuários podem, ocasionalmente, mudar sua operadora primária em busca da menor probabilidade de bloqueio possível para suas futuras requisições de serviço.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. A seção II introduz um modelo markoviano que produz a probabilidade de bloqueio suave de duas operadoras em duopólio, dados os números de canais implantados por cada uma e as intensidades de tráfego primário direcionado a cada uma delas. Na seção III, as intensidades de tráfego primário das operadoras passam a ser determinadas por um jogo entre usuários até atingir o equilíbrio, cuja existência é demonstrada, obtendo-se assim a partição do tráfego primário entre ambas. Baseado na partição

Helio Waldman, Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André, Brasil, E-mail: helio.waldman@ufabc.edu.br

Rodrigo C. Bortoletto, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP, Guarulhos, Brasil, E-mail: bortoletto@ifsp.edu.br

do tráfego em equilíbrio, a Seção IV analisa alguns jogos de dimensionamento da capacidade de canais entre duas operadoras que têm como objetivo a maximização de seus lucros, sugerindo condições para a estabilização do duopólio competitivo ou sua degeneração em monopólio. Finalmente na Seção V conclui-se este artigo com as considerações finais.

II. UM MODELO DE BLOQUEIO SUAVE

Em [3], foi proposto um modelo markoviano que capta os comportamentos descritos acima e fornece a probabilidade de bloqueio suave para cada uma das operadoras quando é dada a intensidade de tráfego primário direcionado a cada uma delas. Consideremos o caso do duopólio formado pelas operadoras 1 e 2. Seja v_m a intensidade de tráfego das requisições submetidas à operadora m e C_m o número de canais disponibilizados pela operadora m . Em um duopólio, $m \in \{1, 2\}$, então a intensidade de tráfego total gerado pelos usuários é dada por:

$$v = v_1 + v_2 \quad (1)$$

e o número total de canais disponibilizados por todas as operadoras é:

$$C = C_1 + C_2 \quad (2)$$

A figura 1a ilustra a cadeia de Markov proposta para um duopólio quando $(C_1 + C_2) = (3, 2)$. O sistema está no estado (i, j) quando a operadora 1 tem $(i \leq C_1)$ canais ativos e a operadora 2 tem $(j \leq C_2)$ canais ativos. Observa-se que a taxa de transição do estado (i, j) para o estado $(i + 1, j)$ é dada por v_1 apenas quando a operadora 2 não está em um estado de bloqueio ($j < C_2$), e por v quando a operadora 2 está em um estado de bloqueio ($j = C_2$), fazendo com que seu tráfego primário seja encaminhado para a operadora 1. De forma análoga, a taxa de transição do estado (i, j) para o estado $(i, j + 1)$ é dada por v_2 quando a operadora 1 não está em um estado de bloqueio ($i < C_1$) e por v quando a operadora 1 está em um estado de bloqueio ($i = C_1$). A taxa de transição do estado (i, j) para $(i - 1, j)$ é dada por i para qualquer valor positivo de i , e a taxa de transição do estado (i, j) para $(i, j - 1)$ por j para qualquer valor positivo de j , refletindo o pressuposto de que todos os serviços são independentes e exponencialmente distribuídos com valor médio 1, de modo que todas as taxas de tráfego estão expressas em Erlang. Todas as taxas de transição restantes são iguais a zero, pois supomos que todas as requisições solicitam canais individuais.

A probabilidade de equilíbrio $p_{i,j}$ de cada estado (i, j) do sistema pode ser obtida a partir da análise markoviana padrão [4]. Se P_{bi} é a probabilidade de bloqueio suave da operadora i , as probabilidades de bloqueio suave das operadoras 1 e 2 podem ser expressas como:

$$P_{b1} = \sum_{j=0}^{C_2} p_{C_1,j} \quad (3)$$

$$P_{b2} = \sum_{i=0}^{C_1} p_{i,C_2} \quad (4)$$

O bloqueio duro irá ocorrer sempre que uma requisição encontrar o sistema no estado (C_1, C_2) . Portanto, a probabilidade de bloqueio duro é dada por:

$$P_b = p_{C_1,C_2} \quad (5)$$

Seja U_k o conjunto de todos os estados onde $i + j = k$. Então, podemos observar na figura 1a que a soma de todas as taxas de transição de qualquer estado em U_k para todos os estados em U_{k+1} é v e a soma de todas as taxas a partir de qualquer estado em U_k para todos os estados em U_{k-1} é k . Portanto, um novo processo de Markov é obtido quando todos os estados de um conjunto U_k são aglomerados em um único estado k , como mostrado na figura 1b.

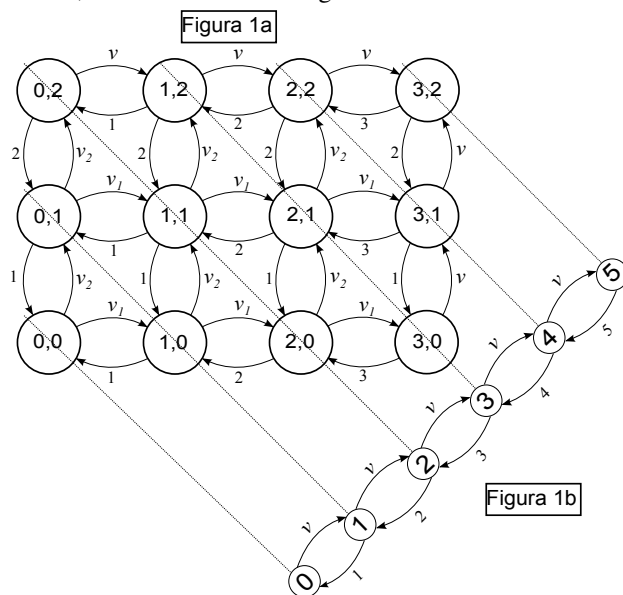


Fig. 1. (a) Processo de Markov para duas operadoras, (b) Todos os estados de cada U_k agrupados em um único estado k .

Este processo gera a probabilidade de bloqueio duro na forma da equação clássica de Erlang-B:

$$P_b = \text{prob}(k = C) = \frac{v^C}{C!} \sum_{k=0}^C \frac{v^k}{k!} \quad (6)$$

III. O JOGO DOS USUÁRIOS

A Seção II é suficiente para descrever uma situação hipotética em que as operadoras seriam alocadas aos usuários por terceiros, tal como corretores ou agentes. No entanto, se os usuários forem livres para escolher suas operadoras primárias, a repartição do tráfego v em (v_1, v_2) surgirá do resultado de um jogo entre os usuários. Supomos que os usuários tenham de alguma forma acesso à informação sobre a probabilidade de bloqueio suave de cada operadora, ou estejam dispostos a estimar seu valor e ocasionalmente testar os valores de bloqueio da operadora secundária. Depois de obter estas informações, o usuário trocará sua operadora primária somente se a operadora secundária tiver uma menor probabilidade de bloqueio.

Através do modelo apresentado na Seção II, as probabilidades de bloqueio suave das duas operadoras foram calculadas em função de v_1 quando $(C_1, C_2) = (5, 3)$ e $v = 8$ como mostrado na figura 2. Note que as duas curvas cruzam em um ponto onde $P_{b1} = P_{b2}$. À esquerda deste ponto $P_{b1} < P_{b2}$; assim sendo, quando um usuário primário da operadora 2 testar a operadora 1, encontrará uma probabilidade de bloqueio suave menor e mudará sua operadora primária. Este movimento aumentará o tráfego primário v_1 direcionado à operadora 1, de modo que o ponto de operação do sistema se movimentará para a direita, aproximando-se assim do ponto de cruzamento. De forma análoga os clientes da operadora 1 mudarão para a operadora 2 sempre que o sistema operar do lado direito do ponto de cruzamento das curvas, fazendo com que o ponto de operação se mova para a esquerda, aproximando-se do ponto de cruzamento das curvas. Há, portanto um equilíbrio quando $P_{b1} = P_{b2}$, fazendo com que nenhum dos usuários esteja motivado a mudar de operadora principal com o objetivo de minimizar sua probabilidade de bloqueio. Em teoria de jogos, esta condição define o equilíbrio de Nash.

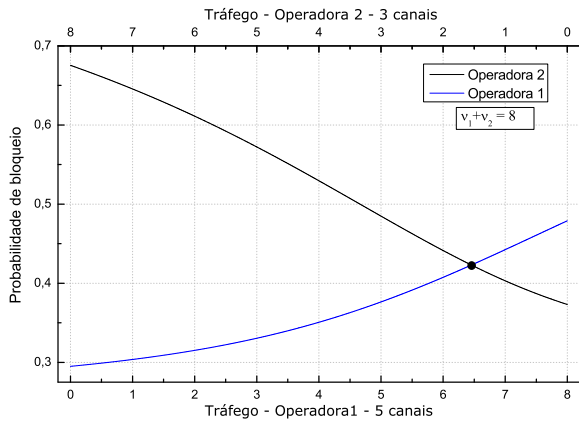


Fig. 2. Probabilidade de bloqueio suave das duas operadoras quando $(C_1, C_2) = (5, 3)$.

A figura 3 mostra as probabilidades de bloqueio suave das duas operadoras em função de v_1 quando $(C_1, C_2) = (7, 1)$ e $v = 8$. Neste caso as curvas não se cruzam dentro do intervalo de interesse. Para qualquer $v_1 \in [0, 8)$ os usuários primários da operadora 2 mudarão para operadora 1 quando testarem a probabilidade de bloqueio suave de sua operadora. Portanto, o equilíbrio de Nash ocorre quando $(v_1, v_2) = (8, 0)$ com $P_{b1} < P_{b2}$.

IV. O JOGO DAS OPERADORAS

As receitas e custos foram normalizados em função das receitas geradas por unidade de tempo por canal ativo, que será considerado 1. O custo total gerado pela operadora m para implantar um canal por unidade de tempo é dado por $s_m < 1$. Supomos que todos os canais disponibilizados pela mesma operadora geram o mesmo custo, contudo apenas os canais ativos geram receita em um dado momento. Quando o sistema estiver no estado (i, j) , a taxa de lucro instantâneo das operadoras 1 e 2 são dados respectivamente por:

$$T_1 = i - s_1 C_1 \quad (7)$$

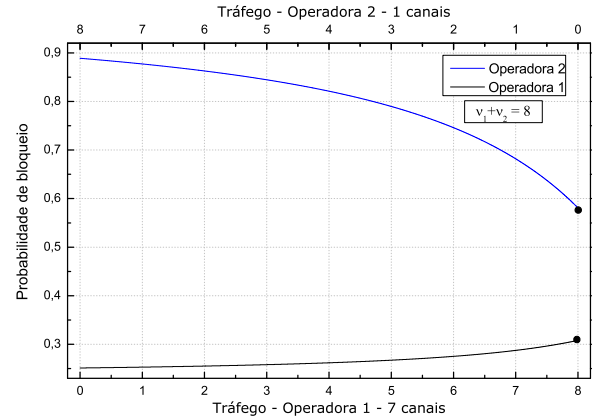


Fig. 3. Probabilidade de bloqueio suave das duas operadoras quando $(C_1, C_2) = (7, 1)$.

$$T_2 = j - s_2 C_2 \quad (8)$$

A taxa média de lucro, ou rentabilidade, das operadoras 1 e 2 são dadas respectivamente por:

$$R_1 = E(i) - s_1 C_1 \quad (9)$$

$$R_2 = E(j) - s_2 C_2 \quad (10)$$

Pela lei de Little [7], sabemos que o número médio de serviços em atendimento pela operadora 1 corresponde à sua taxa total do tráfego de entrada, em Erlang. Observando a figura 1 a obtemos:

$$E(i) = v_1 (1 - P_{b1}) + v_2 (P_{b2} - P_b) \quad (11)$$

Da mesma forma obtemos para operadora 2:

$$E(j) = v_2 (1 - P_{b2}) + v_1 (P_{b1} - P_b) \quad (12)$$

A rentabilidade das operadoras 1 e 2 podem ser expressas como:

$$R_1 = v_1 (1 - P_{b1}) + v_2 (P_{b2} - P_b) - s_1 C_1 \quad (13)$$

$$R_2 = v_2 (1 - P_{b2}) + v_1 (P_{b1} - P_b) - s_2 C_2 \quad (14)$$

Consideremos um jogo em que cada operadora m escolhe um número C_m de canais a serem implementados com o objetivo de maximizar a sua rentabilidade R_m . Para cada perfil de estratégias (C_1, C_2) , o tráfego agregado v gerado pela população de usuários, se defrontara com uma probabilidade de bloqueio duro P_b determinada por $C = C_1 + C_2$ conforme a equação 6. O jogo entre usuários determinará a repartição do tráfego primário (v_1, v_2) e as probabilidades de bloqueio suave P_{b1} e P_{b2} , de modo que as rentabilidades possam ser calculadas a partir das equações 11 e 12.

A tabela 1 apresenta a forma normal do jogo entre operadoras quando $v = 5$, $s_1 = s_2 = 0,2$ (custo simétrico), e os usuários são livres para minimizar suas probabilidades de

bloqueio suave em um jogo não cooperativo. As linhas são indexadas pelo valor de C_1 e as colunas são indexadas pelo valor de C_2 . Na tabela, cada célula mostra o valor correspondente à (R_1, R_2) . Em nome da legibilidade, a precisão total dos valores não é mostrada. Um equilíbrio de Nash é gerado por um perfil de estratégias puras (C_1, C_2) se a célula correspondente na forma normal mostrar um valor que maximize R_1 em sua coluna e um valor que maximize R_2 em sua linha. Nestas condições, nenhuma operadora terá motivos para mudar de estratégia se acreditar que seu adversário não mudará também. Na tabela 1 o equilíbrio de Nash surge na célula (11, 11) com um perfil de lucro (0, 3, 0, 3).

A tabela 2 mostra a mesma forma normal quando $v = 5$, $s_2 = 0,2$ e $s_1 = 0,15$, mas com uma infraestrutura maior. Por esta razão, as linhas e colunas ímpares são omitidas, a fim de manter a tabela legível. Nesta tabela, nenhuma célula satisfaz a condição de equilíbrio de Nash entre as estratégias puras. Consideremos então um jogo hipotético no qual os jogadores se movem alternando suas posições com o objetivo de maximizar seus lucros depois de consultarem a tabela 2. Iniciaremos o jogo na célula (0, 0), e deixaremos o jogador 1 movimentar-se primeiro. Ele implantará 8 canais, passando o sistema para a célula (8, 0); em seguida entrará o jogador 2 com um custo de implantação de canais 25% menor e implantará 16 canais, levando a rede para célula (8, 16) onde seu lucro será maximizado. Ao observar a tabela 2, a operadora 1 notará que sua nova condição lhe causa lucro negativo (prejuízo); além disso, a única maneira para minimizar seu prejuízo, maximizando assim seu lucro, será sair do jogo, levando o sistema para a célula (0, 16), fazendo assim com que a operadora 2 desfrute de um monopólio.

Se a operadora 2 objetivar o lucro máximo, reduzirá a dimensão de sua rede para 9 canais, elevando seu lucro para 3,5. Esta condição permitiria que outra operadora entrasse no jogo com 12 canais, fazendo com que a operadora 2 aumente seu número de canais para 18, forçando a operadora 1 a deixar o jogo novamente. Assim, se cada operadora executar seu próximo passo no jogo em busca do lucro máximo, o jogo cairá num "loop" dado por $(0, 18) \rightarrow (0, 9) \rightarrow (12, 9) \rightarrow (12, 18) \rightarrow (0, 18) \rightarrow \dots$. Isso ocorre por causa do comportamento míope dos jogadores, que faz com que busquem apenas o lucro máximo em cada próxima jogada. Eventualmente, na próxima vez em que o sistema passar pela célula (0, 18), a operadora 2 poderá observar que se reduzir seu número de canais para 14 ao invés de 9, a outra operadora não terá condições de entrar no jogo com lucro positivo, e ela poderá desfrutar de um monopólio competitivo estável, embora seu lucro fique em apenas 2,9 ao invés de 3,5, um pequeno preço (17%) a ser pago pela estabilidade de mercado. Por outro lado esta estabilidade ainda é fraca, pois se baseia na miopia da operadora 1. Se observarmos atentamente a linha 18 da tabela 2, nota-se que a operadora 1 também poderia forçar a saída da operadora 2 do jogo, através da implantação de 18 canais. Entretanto, isso a deixaria com apenas 1,4 de lucro, ao passo que a mesma estratégia renderia um lucro de 2,9 à operadora 2. Ambos os jogadores são capazes de gerar perdas ao outro jogador e cada um deles pode conseguir um monopólio competitivo se o outro jogador não estiver disposto

a suportar as perdas.

A tabela 3 é uma descrição da mesma forma normal do jogo quando $v = 5$, $s_2 = 0,1$ e $s_1 = 0,2$. A mesma análise se aplica levando inicialmente ao mesmo laço de repetição $(0, 10) \rightarrow (6, 10) \rightarrow (6, 24) \rightarrow (0, 24) \rightarrow (0, 10) \rightarrow \dots$. A operadora 2 pode então escolher entre um monopólio instável que maximiza seu lucro através da inserção de 10 canais e lucro de 3,9, ou um monopólio competitivo estável com a implantação de 14 canais e um lucro de 3,6. Agora, entretanto, a fim de forçar a operadora 2 a sair do jogo para não ter prejuízo, a operadora 1 teria que implantar 26 canais, incorrendo em prejuízo (-0,2) para si mesma. Uma vez que este comportamento não pode ser considerado competitivo, podemos dizer que não existe possibilidade real da operadora 1 alcançar um monopólio competitivo nessas condições, pois ela só conseguiria causar prejuízo à operadora 2 se gerasse prejuízo a si mesma. Portanto, uma vantagem de custos de implantação maior que 50% sugere uma chance maior da operadora 2 desafiar o domínio inicial da operadora 1, quando comparado com uma diferença de apenas 25%.

A inspeção das Tabelas II e III mostra que elas não produzem equilíbrio de Nash entre estratégias puras. A Teoria dos Jogos nos diz então que, sendo a Tabela finita como nos casos considerados, haverá um equilíbrio de Nash entre estratégias mistas. A estratégia é chamada mista quando o jogador sorteia sua estratégia conforme uma dada distribuição de probabilidade sobre o espaço de estratégias. Neste trabalho, porém, supomos que os jogadores só adotam estratégias puras, resultando em loops nos jogos de lances alternados quando cada jogador busca a maximização da sua recompensa no próprio lance.

V. CONCLUSÕES

Em [6], o jogo das operadoras foi discutido para a situação em que os custos de implantação por canal são simétricos. Neste artigo, estendemos os resultados para o caso em que os custos de implantação dos canais são assimétricos. O modelo teórico do jogo é testado para determinar o grau de assimetria de custos necessário para produzir equilíbrio estável entre as duas operadoras, desafiando assim a noção de monopólio natural. Os resultados fornecem uma visão sobre a capacidade de operadoras com tecnologia inovadora de desafiar a posição de uma operadora dominante no mercado. Além disso, o modelo teórico de jogo proposto fornece um quadro teórico para futuros estudos de interesse para reguladores e empresas.

O modelo proposto deverá ser refinado para contemplar várias outras circunstâncias próprias de uma situação de mercado, tais como:

- Eventual impossibilidade dos competidores construírem a forma normal do jogo (Tabelas da Seção IV) e por ela pautarem suas decisões, por não terem acesso aos dados de custo e dimensionamento da rede do concorrente;
- Variabilidade do comportamento dos usuários;
- Perdas na troca de operadora pelo usuário;
- Diferenças entre os SLA's oferecidos pelas operadoras; etc.

Mesmo sem contemplar essas possíveis realidades, o modelo foi capaz de prever algumas situações típicas de mercado,

TABELA I

A FORMA NORMAL DO JOGO ENTRE OPERADORAS QUANDO $v = 5, s_1 = s_2 = 0, 20$.

Coluna	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14	
Linha	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2
0	0	0	0	0,6	0	1,2	0	1,8	0	2,2	0	2,6	0	2,8	0	3	0	3	0	3	0	2,9	0	2,8	0	2,6	0	2,4	0	2,2
1	0,6	0	0,6	0,6	0,5	1,2	0,5	1,8	0,4	2,2	0,3	2,6	0,2	2,8	0,1	3	0	3	-0,1	3	-0,1	2,9	-0,2	2,8	-0,2	2,6	-0,2	2,4	-0,2	2,2
2	1,2	0	1,2	0,5	1,1	1,1	0,9	1,7	0,7	2,1	0,5	2,5	0,3	2,8	0,1	2,9	-0,1	3	-0,2	2,9	-0,3	2,8	-0,3	2,7	-0,3	2,5	-0,4	2,4	-0,4	2,2
3	1,8	0	1,8	0,5	1,7	0,9	1,4	1,4	1,2	1,8	0,9	2,2	0,6	2,4	0,4	2,5	0,2	2,6	0	2,6	-0,2	2,6	-0,3	2,5	-0,4	2,4	-0,4	2,2	-0,5	2,1
4	2,2	0	2,2	0,4	2,1	0,7	1,8	1,2	1,5	1,5	1,2	1,8	0,9	2	0,6	2,1	0,4	2,2	0,2	2,2	0	2,2	-0,2	2,2	-0,3	2,1	-0,4	2	-0,5	1,9
5	2,6	0	2,6	0,3	2,5	0,5	2,2	0,9	1,8	1,2	1,5	1,5	1,1	1,6	0,8	1,8	0,5	1,9	0,3	1,9	0,1	1,9	-0,1	1,9	-0,2	1,8	-0,4	1,8	-0,5	1,7
6	2,8	0	2,8	0,2	2,8	0,3	2,4	0,6	2	0,9	1,6	1,1	1,3	1,3	1	1,4	0,7	1,5	0,4	1,6	0,2	1,6	0	1,6	-0,2	1,6	-0,3	1,5	-0,5	1,5
7	3	0	3	0,1	2,9	0,1	2,5	0,4	2,1	0,6	1,8	0,8	1,4	1	1,1	1,1	0,8	1,2	0,5	1,3	0,3	1,3	0,1	1,3	-0,1	1,3	-0,3	1,3	-0,4	1,2
8	3	0	3	0	3	-0,1	2,6	0,2	2,2	0,4	1,9	0,5	1,5	0,7	1,2	0,8	0,9	0,9	0,6	1	0,4	1	0,2	1	0	1	-0,2	1	-0,4	1
9	3	0	3	-0,1	2,9	-0,2	2,6	0	2,2	0,1	1,9	0,3	1,6	0,4	1,3	0,5	1	0,6	0,7	0,7	0,5	0,7	0,2	0,8	0	0,8	-0,2	0,8	-0,4	0,8
10	2,9	0	2,9	-0,1	2,8	-0,3	2,6	-0,2	2,2	0	1,9	0,1	1,6	0,2	1,3	0,3	1	0,4	0,7	0,5	0,5	0,5	0,3	0,5	0,1	0,5	-0,1	0,5	-0,3	0,5
11	2,8	0	2,8	-0,2	2,7	-0,3	2,5	-0,3	2,2	-0,2	1,9	-0,1	1,6	0	1,3	0,1	1	0,2	0,8	0,2	0,5	0,3	0,3	0,1	0,3	-0,1	0,3	-0,3	0,3	
12	2,6	0	2,6	-0,2	2,5	-0,3	2,4	-0,4	2,1	-0,3	1,8	-0,2	1,6	-0,2	1,3	-0,1	1	0	0,8	0	0,5	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1	-0,1	0,1	-0,3	0,1
13	2,4	0	2,4	-0,2	2,4	-0,4	2,2	-0,4	2	-0,4	1,8	-0,4	1,5	-0,3	1,3	-0,3	1	-0,2	0,8	-0,2	0,5	-0,1	0,3	-0,1	0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,3	-0,1
14	2,2	0	2,2	-0,2	2,2	-0,4	2,1	-0,5	1,9	-0,5	1,7	-0,5	1,5	-0,5	1,2	-0,4	1	-0,4	0,8	-0,4	0,5	-0,3	0,3	-0,3	0,1	-0,3	-0,1	-0,3	-0,3	-0,3

TABELA II

A FORMA NORMAL DO JOGO ENTRE OPERADORAS QUANDO $v = 5, s_2 = 0, 75 s_1 = 0, 15$.

Coluna	0		2		4		6		8		9		10		12		14		16		18	
Linha	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2
0	0	0	0	1,3	0	2,4	0	3,1	0	3,4	0	3,5	0	3,4	0	3,2	0	2,9	0	2,6	0	2,3
2	1,2	0	1,1	1,2	0,7	2,3	0,3	3,1	-0,1	3,4	-0,2	3,4	-0,3	3,3	-0,3	3,1	-0,4	2,9	-0,4	2,6	-0,4	2,3
4	2,2	0	2,1	0,8	1,5	1,7	0,9	2,3	0,4	2,6	0,2	2,7	0	2,7	-0,3	2,7	-0,5	2,6	-0,6	2,4	-0,7	2,2
6	2,8	0	2,8	0,4	2	1,1	1,3	1,6	0,7	1,9	0,4	2	0,2	2,1	-0,2	2,2	-0,5	2,2	-0,7	2,1	-0,9	2
8	3	0	3	0	2,2	0,6	1,5	1	0,9	1,3	0,6	1,4	0,4	1,5	0	1,6	-0,4	1,7	-0,7	1,7	-0,9	1,6
10	2,9	0	2,8	-0,2	2,2	0,2	1,6	0,5	1	0,8	0,7	0,9	0,5	1	0,1	1,1	-0,3	1,2	-0,7	1,3	-0,9	1,2
12	2,6	0	2,5	-0,2	2,1	-0,1	1,6	0,1	1	0,4	0,8	0,5	0,5	0,6	0,1	0,7	-0,3	0,8	-0,7	0,9	-1	0,9
14	2,2	0	2,2	-0,3	1,9	-0,3	1,5	-0,2	1	0	0,8	0,1	0,5	0,2	0,1	0,3	-0,3	0,4	-0,7	0,5	-1	0,5
16	1,8	0	1,8	-0,3	1,6	-0,4	1,3	-0,4	0,9	-0,3	0,7	-0,2	0,5	-0,2	0,1	-0,1	-0,3	0	-0,7	0,1	-1	0,1
18	1,4	0	1,4	-0,3	1,3	-0,5	1,1	-0,6	0,7	-0,5	0,5	-0,5	0,3	-0,4	0	-0,4	-0,4	-0,3	-0,8	-0,2	-1,1	-0,2

TABELA III

A FORMA NORMAL DO JOGO ENTRE OPERADORAS QUANDO $v = 5, s_2 = 0, 50 s_1 = 0, 10$.

Coluna	0		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26	
Linha	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2	Op.1	Op.2
0	0	0	0	1,4	0	2,6	0	3,4	0	3,8	0	3,9	0	3,8	0	3,6	0	3,4	0	3,2	0	3	0	2,8	0	2,6	0	2,4
2	1,2	0	1,1	1,3	0,7	2,5	0,3	3,4	-0,1	3,8	-0,3	3,8	-0,3	3,7	-0,4	3,6	-0,4	3,4	-0,4	3,2	-0,4	3	-0,4	2,8	-0,4	2,6	-0,4	2,4
4	2,2	0	2,1	0,9	1,5	1,9	0,9	2,6	0,4	3	0	3,2	-0,3	3,3	-0,5	3,3	-0,6	3,2	-0,7	3,1	-0,8	3	-0,8	2,8	-0,8	2,6	-0,8	2,4
6	2,8	0	2,8	0,5	2	1,3	1,3	1,9	0,7	2,3	0,2	2,6	-0,2	2,8	-0,5	2,9	-0,7	2,9	-0,9	2,9	-1	2,8	-1,1	2,7	-1,1	2,5	-1,1	2,3
8	3	0	3	0,1	2,2	0,8	1,5	1,3	0,9	1,7	0,4	2	0	2,2	-0,4	2,4	-0,7	2,5	-0,9	2,5	-1,1	2,5	-1,2	2,4	-1,4	2,4	-1,4	2,2
10	2,9	0	2,8	-0,1	2,2	0,4	1,6	0,8	1	1,2	0,5	1,5	0,1	1,7	-0,3	1,9	-0,7	2,1	-0,9	2,1	-1,2	2,2	-1,4	2,2	-1,5	2,1	-1,6	2
12	2,6	0	2,5	-0,1	2,1	0,1	1,6	0,4	1	0,8	0,5	1,1	0,1	1,3	-0,3	1,5	-0,7	1,7	-1	1,8	-1,2	1,8	-1,5	1,9	-1,7	1,9	-1,8	1,8
14	2,2	0	2,2	-0,2	1,9	-0,1	1,5	0,1	1	0,4	0,5	0,7	0,1	0,9	-0,3	1,1	-0,7	1,3	-1	1,4	-1,3	1,5	-1,5	1,6	-1,8	1,6	-2	1,6
16	1,8	0	1,8	-0,2	1,6	-0,2	1,3	-0,1	0,9	0,1	0,5	0,3	0,1	0,5	-0,3	0,7	-0,7	0,9	-1	1	-1,3	1,1	-1,6	1,2	-1,9	1,3	-2,1	1,3
18	1,4	0	1,4	-0,2	1,3	-0,3	1,1	-0,3	0,7	-0,1	0,3	0,1	0	0,2	-0,4	0,4	-0,8	0,6	-1,1	0,7	-1,4	0,8	-1,7	0,9	-2	1	-2,2	1
20	1	0	1	-0,2	1	-0,4	0,8	-0,4	0,5	-0,3	0,2	-0,2	0	-0,5	0,1	-0,9	0,3	-1,2	0,4	-1,5	0,5	-1,8	0,6	-2,1	0,7	-2,3	0,7	
22	0,6	0	0,6	-0,2	0,6	-0,4	0,5	-0,5	0,2	-0,4	0	-0,4	-0,3	-0,3	-0,7	-0,1	-1	0	-1,3	0,1	-1,6	0,2	-1,9	0,3	-2,2	0,4	-2,4	0,4
24	0,2	0	0,2	-0,2	0,2	-0,4	0,1	-0,5	0	-0,6	-0,3	-0,5	-0,5	-0,5	-0,8	-0,4	-1,1	-0,3	-1,4	-0,2	-1,7	-0,1	-2	0	-2,3	0,1	-2,6	0,2
26	-0,2	0	-0,2	-0,2	-0,2	-0,4	-0,2	-0,6	-0,4	-0,6	-0,5	-0,7	-0,8	-0,6	-1	-0,6	-1,3	-0,5	-1,6	-0,4	-1,9	-0,3	-2,2	-0,2	-2,5	-0,1	-2,7	-0,1

conforme discutido na Seção IV. Ainda que reconhecendo a necessidade de conferir mais realismo ao modelo, nossa expectativa é que ele possa ser útil para entender e analisar a dinâmica da “Infraestrutura como Serviço” (IaaS), um dos segmentos da “Nuvem” emergente. Pois, como disse George E.P. Box em 1987: “Todos os modelos são errados, mas alguns são úteis.”.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do CNPq, da CAPES, do IFSP e da UFABC.

REFERÊNCIAS

[1] J. Laffont, e J. Tirole, *Competition in telecommunications*. The MIT Press, 2001.

[2] A. Erlang, *Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges*, The Post Office Electrical Engineers Journal, 1918.

[3] H. Waldman, R.C. Bortoletto e G. S. Pavani, *Dimensioning of optical networks under unconstrained blocking probabilities*, em: International Conference on Transparent Optical Networks, 2010, Munique, Alemanha. Proceedings of ICTON 2010, 2010.

[4] A. Kumar, D. Manjunath, e J. Kuri, *Communication networking: an analytical approach*, Morgan Kaufmann, 2004.

[5] H. Waldman, R. C. Bortoletto e G. S. Pavani, *Network capacity planning under competition*, em: Asia Communications and Photonics Conference and Exhibition, Xangai, China. Proceedings of ACP 2010, 2010.

[6] R. C. Bortoletto, *Um estudo sobre o dimensionamento de redes em ambientes competitivos*, Tese de mestrado, UFABC, Brazil, 2010.

[7] D. Bertsekas and R. Gallager, *Data Networks*, 2nd. Edição, Prentice-Hall International, 1997.

[8] J. Watson, *Strategy: an Introduction to Game Theory*, 2nd Edição, Norton, 2008.